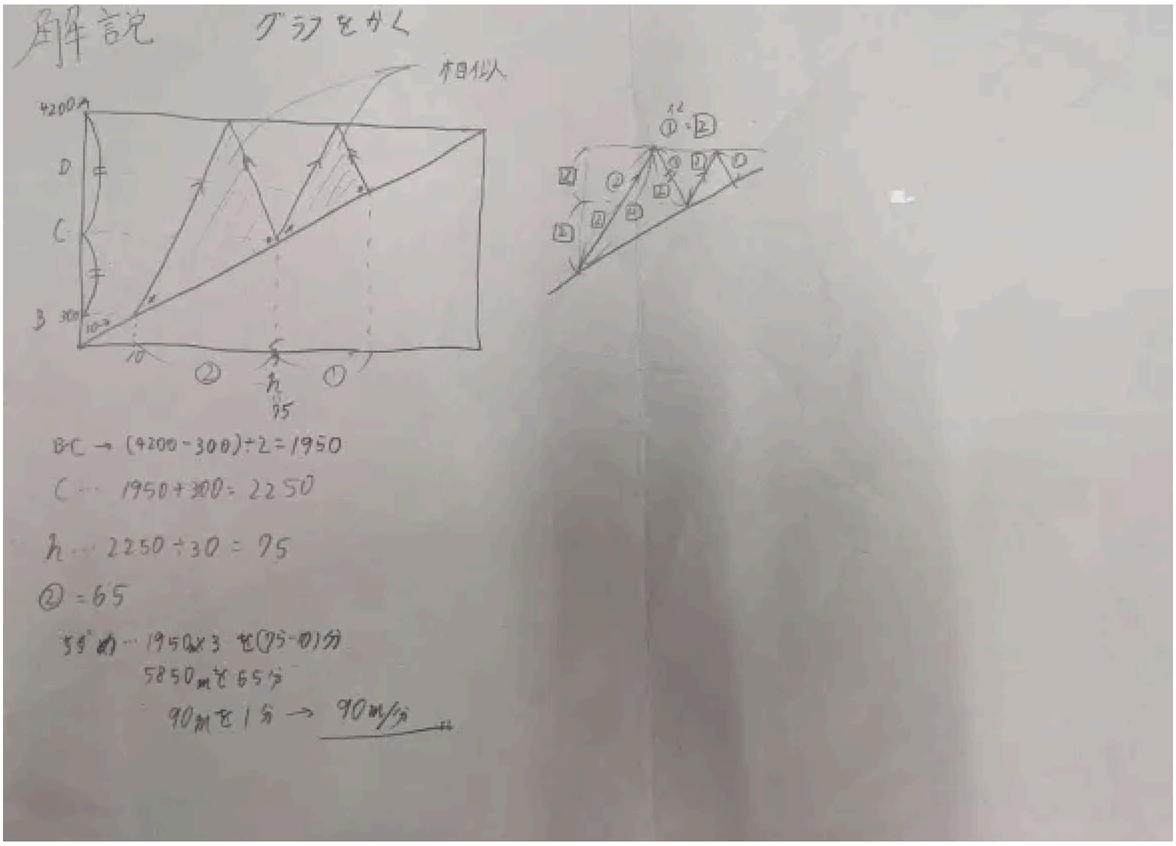
問題作った人は解答解説書いてください

1番　**6**　　左下4つの正方形の中にある塗られてる部分の面積は4で他2箇所の面積の和は2よって4＋2

左下の方に集まっている3つの黒い部分と、1番右にある黒い部分を合わせた4つが1辺が2cmの正方形1つ分の面積と等しくなる。
残った2つが正方形の半分の面積と等しくなるので、
4+2=6

2番　分速**90m**

グラフをかく、相似な三角形を見つける



3番　**11**
①ゴリ押し

②左上から右に①、②、③
次に中段左から④、⑤、⑥
下の段左から⑦、⑧、⑨とする。
4×8=32より⑤+⑧=32
⑤=21より⑧=11
また⑦+⑧=30より⑦=19
①と⑦は面積と横の長さが同じなので縦の長さが等しい。よって②=⑧=11
②+⑤=③+⑥=32であり、縦の長さが同じなので③の長方形の横の長さは4cmとなる。すると⑧と⑨の縦横の長さが等しいとわかるので、⑨=⑧=11

面積30の部分と32の部分を切ってみてください

4番　**44**　約数が奇数個であることと同値なので、2024以下の平方数の個数である。45^2=2025を知ってると早い

例えば、28番,36番のロッカーを考える。
28番のロッカーは手順1,2,4,7,14,28のときに開閉され、
最終的に閉じている状態になる。
36番のロッカーは手順1,2,3,4,6,9,12,18,36のときに開閉され、
最終的に開いている状態になる。
ここからわかるようにロッカーの番号の正の約数の個数が奇数のときに開いている状態になる。
正の約数の個数が奇数のとき、その数は平方数なので、
2024以下の自然数で平方数なのは44個ある。
よって空いているロッカーの数は44個である。

5番 ① **4**長い　順を追って考える　すると最後の道幅だけが差だと分かる

道が90度に折れ曲がるとき、4の差が生まれる。
半円で2πの差が生まれる
まず、最初の半円カーブで、①のほうが2π長くなる。
次の折れ曲がりで、①のほうが2π-4長くなる。
更に次の方の折れ曲がりで、②のほうが8-2π長くなる
半径32の半円で、②のほうが8長くなる。
半径18の半円で、②のほうが8-2π長くなる。
そして、大量の折れ曲がりゾーンを抜けると、②のほうが8-2π長くなる。
そして半径36の半円で②の方が8長い。
そして最終的に3回の折れ曲りゾーンで①の方が4長くなる。

6番　**81493**　**81294**のみ　今回前半12問の中で一番難しい
ヨ＋ガ＝カかつカ＝ガより
ヨ＝0、9

ヨ<キよりヨ≠9
よってヨ＝0と決まる
キ＋1＝ブよりキ≦8であるから
3≦ウ≦7
また、ウ＋ク＜10
あとはウの数で場合分けを考えると上記の2通りだけになる

7番　**a=3,b=-1**　1辺が2cm8cmってわかってる直角三角形を一番大きい直角三角形の下の辺を軸に線対称にしてみると
8cmの辺を軸として短辺が2cmの直角三角形を線対称に追加すると、
13＋2＋2＝17より大きな二等辺三角形と底辺が4cmの小さい二等辺三角形ができる
よってx°＝180°−2x°+y
つまり3x−y＝180
よってa=3 かつb=-1

8番　**2:1**　メネラウスの定理とチェバの定理、あと中点連結定理を使ったほうが解きやすい
断面の三角形EACにおいて
EC//HFかつAF=FCであるから、直線FHとEAの交点をJとすると
中点連結定理よりAJ=JE
また、メネラウスの定理よりAI/IC=1/2
これとAF=FCよりAI：IF：FC＝2：1：3
三角形EAIにおいてチェバの定理よりEH/HC＝2/1
つまりEH：IH＝2：1

9番　**23041**　2024の三乗根は13未満だから気合で数え上げる。
特に7以下の場合1になりそれ以上のときは一回工程を挟んで1になるためそこのところのカウントに注意。
17×297+15×397+13×331+11×271+9×217+7×169+6×127+5×91+4×61+3×37+2×19+1×7なので計算がきつい。

10番　**4.5**　解き方はたくさんある

接弦定理より∠ABD＝∠DAC
また、AB//EDより∠ABD＝∠EDC

ここで∠DCAは共通だから二角相等より三角形DAC∽三角形EDC
よってCD：CE＝AC：DC＝AD：DE
６：４＝AC：６＝AD：３
つまりAC＝９　AD＝９/2
AB//EDであるから錯角より∠BAD＝∠ADE
ここで四角形ABDFは円に内接しているので、
∠ABF=180°ー∠ADF＝∠ADE
つまり∠BAD＝∠ABF
これとAB//DFより四角形ABDFは等脚台形であるから
AD＝BF
つまりBF＝９/２＝4,5

11　M1260，N10080 よって答えは**11340**
1000~1099のときM/1からM/10までが100以上のMの約数になりうる値
10番目に大きな正の約数が100より大きくなる必要があるので、M/1からM/10まですべてが整数になる
つまりMが1～10の最小公倍数2520の倍数である必要があるが、M＜1100より不適
1100~1199のときM/1からM/11までが100以上のMの約数になりうる値
10番目に大きな正の約数が100より大きくなる必要があるので、M/1からM/11のうち少なくとも10個が整数になる
しかし、これを満たすのは同様に2520以上である必要があるため不適
1200~1299のときM/1からM/12までが100以上のMの約数になりうる値
10番目に大きな正の約数が100より大きくなる必要があるので、M/1からM/12のうち少なくとも10個が整数になる
調べるとM＝1260にて適する
また、Nは同様に1~10までの最小公倍2520で先程の考え方を使うと10080が最小だと分かる

12　5055(n)よりn>=6。
3675=3×5×5×7×7また、$a=5n^3+5n+5=5(n^3+n+1)$より最大公約数を素因数分解で解く方法から、n^3+n+1が3と5と7で割り切れるかを考えるとgがわかる。modを使う。このとき、余りは周期するので、n>=6を無視することができ、合同式の性質からn^3とnと1に分けて考えて後で足すとわかりやすい。7を法とすると、n^3+n+1は7で割り切れないことがわかり、同様に5を法としたときも、n^3+n+1は5で割り切れない。次に3を法とするとn^3+n+1はn≡1のとき3で割り切れ、n≡0、2のとき3で割り切れない事がわかる。よって
(答)3を法として、n≡1のとき、g=15　n≡0、2のときg=5
ただしn>=6

13　**5√3**
まず，Rが線分AC上ではなく線分BC上にあることを証明しておく。
∠PQB=67.5°，∠RPQ=45°より，∠PRQ=22.5°
ここで，線分ABと∠ACBの角の二等分線の交点は，線分CAと線分CBの長さの比から，点PよりAに近い側にあると分かる。この交点をWとすると，CWとRPは平行である。WとPの位置関係から，Rは線分BC上にあると分かる。

ARの長さを求める。
AからBCに垂線を下ろし，BCと垂線の交点をDとする。
DRの長さを出せば，**AD=5√2**であることと，三平方の定理からARの長さが分かる。
さて，点Pが線分ABの中点であり，△ABDが直角二等辺三角形であることから，∠BPD=90°である。
問題文中の点Sの定義より，∠QPS=45°，また，BP=BQであるから∠BPQ=67.5°
∠BPD=90°であるから，∠QPD=22.5°であり，∠SPD=∠QPS-∠QPD=22.5°
∠PRQ=∠SPD=22.5°であるから，△PDRは二等辺三角形であり，**DR=PD=5**である。
AD=5√2，DR=5であるから，三平方の定理より，**AR=√(50+25)=5√3**

14　n=3kとするとき
　1/3×(2/3)^(k-1)
　　n=3kと表せないとき0
日本語で書くと三分の一かけるかっこ三分の二のk-1乗
赤、青、白の枚数を(赤青白)の順に表すとすると、(111)→それぞれ1/3(210)(021)(102)
(210)の時、(210)→2/9で(120)1/9で(201)
→2/27で(030)4/27で(111)1/27で(300)2/27で(111)
つまり1/9操作が終了で、2/9で(111)に戻る
赤、青、白は対称なので3回の操作で終了する確率は1/9×3=⅓
また、⅔で(111)に戻る
これが繰り返されるので、3の倍数回の操作で操作が終了し、その確率は1/3×(2/3)^(n/3-1)となり、それ以外だと0になる

15　怒涛の場合分け　答え$\frac{479}{9375}$
＜解答・解説＞

頂点Aを一段目の頂点、頂点Aの隣の5つの頂点を二段目の頂点、頂点Bの隣の5つの頂点を三段目の頂点、頂点Bを四段目の頂点として考えていく。ポリドロンを使って実際に正二十面体を作ると問題を解きやすくなる。
同じ段数の頂点であれば、Pがx回移動し終えて頂点Bにたどり着く場合の数はすべて一致する。(例えば、二段目のある頂点から2回移動して頂点Bに辿り着く場合の数は2(通り)であり、二段目の他の頂点においても、2回移動して頂点Bに辿り着く場合の数は同じく2(通り)である。)この性質を用いれば調べる場合の数を大幅に減らすことができる。

点Pが頂点Aから頂点Bまで到達するには、最低3回移動する必要がある。
そのため、
i)サイコロの目が1のときの確率
頂点Bまで到達できないので確率は0
ii)サイコロの目が2のときの確率
頂点Bまで到達できないので確率は0

iii)サイコロの目が3のときの確率
一段目の頂点から四段目の頂点まで3回で到達する場合の数は調べると**10(通り)**
…①よって確率は
$\frac{10}{5^3}$(後の計算のため、あえて約分していない)

iv)サイコロの目が4のときの確率
4回の移動のうち、初めの一回目の移動では二段目の頂点に点Pが移動する。その場合の数は5(通り)
二回目の移動について、二段目の頂点から四段目の頂点まで残りの3回の移動で到達する場合の数は調べると**8(通り)**
…②よって確率は
$\frac{5\times8}{5^4}=\frac{40}{5^4}$(後の計算のため、あえて約分していない)

v)サイコロの目が5のときの確率
5回の移動のうち、初めの一回目の移動では二段目の頂点に点Pが移動する。その場合の数は5(通り)
二回目の移動について、二段目の頂点から一段目の頂点へと移動し頂点Bに到達する場合の数をa、二段目の頂点から二段目の頂点へと移動し点Bに到達する場合の数をb、二段目の頂点から三段目の頂点へと移動し頂点Bに到達する場合の数をcとする。
<aを求める>
2回移動したとき一段目の頂点に点Pがあるので、残り3回の移動で点Pが一段目の頂点か ら四段目の頂点へと移動する場合の数は①より10(通り)。よってa=10

<bを求める>

2回移動したとき二段目の頂点に点Pがあるので、残り3回の移動で点Pが二段目の頂点から四段目の頂点へと移動する場合の数は②より(8通り)。よってb=8

<cを求める>

2回移動したとき三段目の頂点に点Pがあるので、残り3回の移動で点Pが三段目の頂点から四段目の頂点へと移動する場合の数は調べると**13(通り)…**③。よってc=13

aは1パターンでb、cはそれぞれ2パターンあるので場合の数は5(a+2b+2c)となる。よって確率は

$\frac{5(10+2\times8+2\times13)}{5^5}=\frac{260}{5^5}$(後の計算のため、あえて約分していない)

vi)サイコロの目が6のときの確率

5回の移動のうち、初めの一回目の移動では二段目の頂点に点Pが移動する。その場合の数は5(通り)

二回目の移動について、二段目の頂点から一段目の頂点へと移動し頂点Bに到達する場合の数をd、二段目の頂点から二段目の頂点へと移動し点Bに到達する場合の数をe、二段目の頂点から三段目の頂点へと移動し頂点Bに到達する場合の数をfとする。

<dを求める>

三回目の移動について、一段目の頂点から二段目の頂点へと移動する場合の数は5(通り)。残り3回の移動で二段目の頂点から四段目の頂点へと移動する場合の数は5×8=40

よって**d=40…**④

<eを求める>

三回目の移動について、二段目の頂点から一段目の頂点へと移動し頂点Bに到達する場合の数をe_1、二段目の頂点から二段目の頂点へと移動し点Bに到達する場合の数をe_2、二段目の頂点から三段目の頂点へと移動し頂点Bに到達する場合の数をe_3とする。

e_1=10(∵①)、e_2=8(∵②)、e_3=13(∵③)

$e=e_1+2e_2+2e_3=52$…⑤

<fを求める>

三回目の移動について、三段目の頂点から二段目の頂点へと移動し頂点Bに到達する場合の数をf_1、三段目の頂点から三段目の頂点へと移動し点Bに到達する場合の数をf_2、三段目の頂点から四段目の頂点へと移動し頂点Bに到達する場合の数をf_3とする。

f_1=8(∵②)、f_2=13(∵③)、四段目の頂点から3回の移動で四段目の頂点まで移動する場合の数は調べると10(通り)であるため、f_3=10

$f=2f_1+2f_2+f_3=52$…⑥

④、⑤、⑥より

サイコロの目が6のときの場合の数は

d+2e+2f=40+52×2+52×2=248

よって確率は

$\frac{5\times248}{5^6}=\frac{248}{5^5}$

i),ii),iii),iv),v),vi)より、求める確率は

$\frac{1}{6}(0+0+\frac{10}{5^3}+\frac{40}{5^4}+\frac{260}{5^5}+\frac{248}{5^5})=\frac{479}{9375}$

16

(1)$(p+1)\cdot 2^{p-2}$

(2)$\frac{n+1}{2}\{(n-p+2)\cdot 2^p-n-2\}$

(3)$\{(s+2t-1)\cdot 2^{s-2}\}\frac{(n-s)!}{(t-1)!(n-s-t+1)!}$

(1)

$a(p,1)={}_1C_0a(p-1,1)+{}_1C_1a(p-1,2)={}_2C_0a(p-2,1)+{}_2C_1a(p-2,2)+{}_2C_2a(p-2,3)$

$={}_{p-1}C_0a(1,1)+{}_{p-1}C_1a(1,2)+\cdots+{}_{p-1}C_{p-2}a(1,p-1)+{}_{p-1}C_{p-1}a(1,p)$

よって$a(p,1)={}_{p-1}C_0\cdot 1+{}_{p-1}C_1\cdot 2+\cdots+{}_{p-1}C_{p-2}\cdot(p-1)+{}_{p-1}C_{p-1}\cdot p$なので、

$2a(p,1)={}_{p-1}C_0\cdot(p+1)+{}_{p-1}C_1\cdot(p+1)+\cdots+{}_{p-1}C_{p-2}\cdot(p+1)+{}_{p-1}C_{p-1}\cdot(p+1)$

$=({}_{p-1}C_0+{}_{p-1}C_1+\cdots+{}_{p-1}C_{p-2}+{}_{p-1}C_{p-1})(p+1)$

$=(p+1)\cdot 2^{p-1}$

よって、$a(p,1)=(p+1)\cdot 2^{p-2}$

(2)

$a(p,q)={}_{p-1}C_0a(1,q)+{}_{p-1}C_1a(1,q+1)+\cdots+{}_{p-1}C_{p-1}a(1,q+p-1)$

より、

$2a(p,q)={}_{p-1}C_0\cdot(p+2q-1)+{}_{p-1}C_1\cdot(p+2q-1)+\cdots+{}_{p-1}C_{p-1}\cdot(p+2q-1)$

$=({}_{p-1}C_0+{}_{p-1}C_1+\cdots+{}_{p-1}C_{p-1})(p+2q-1)$

$=(p+2q-1)\cdot 2^{p-1}$

よって、$a(p,q)=(p+2q-1)\cdot 2^{p-2}$

ここで、n段ピラミッドのp段目に書かれている数の和を$X(p,n)$とする。

このとき、$X(p+1,n)=2X(p,n)-a(p,1)-a(p,n-p+1)$という関係式が成り立つ。

$a(p,1)=(p+1)\cdot 2^{p-2}$

$a(p, n-p+1) = (p + 2(n-p+1) - 1) \cdot 2^{p-2} = (2n - p + 1) \cdot 2^{p-2}$
$X(1, n) = \frac{n(n+1)}{2}$より、

$X(p+1, n) = 2X(p, n) - (p+1) \cdot 2^{p-2} - (2n - p + 1) \cdot 2^{p-2}$

$X(p+1, n) = 2X(p, n) - (2n+2) \cdot 2^{p-2}$

$\frac{X(p+1,n)}{2^{p-1}} = \frac{X(p,n)}{2^{p-2}} - (n+1)$

$\frac{X(p,n)}{2^{p-2}} = \frac{X(1,n)}{2^{1-2}} - (p-1)(n+1)$

$\frac{X(p,n)}{2^{p-2}} = n(n+1) - (p-1)(n+1)$

$\frac{X(p,n)}{2^{p-2}} = (n-p+1)(n+1)$

$X(p, n) = (n-p+1)(n+1) \cdot 2^{p-2}$
となる。

$S(p, n) = \sum_{k=1}^{p} X(k, n) = \sum_{k=1}^{p} (n-k+1)(n+1) \cdot 2^{k-2}$

$= (n+1) \sum_{k=1}^{p} (n+1) \cdot 2^{k-2} - (n+1) \sum_{k=1}^{p} k \cdot 2^{k-2}$

$(n+1) \sum_{k=1}^{p} (n+1) \cdot 2^{k-2} = (n+1)^2 \cdot \frac{2^p - 1}{2}$

$\sum_{k=1}^{p} k \cdot 2^{k-2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p} k \cdot 2^{k-1}$

$\sum_{k=1}^{p} k \cdot 2^{k-1} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + p \cdot 2^{p-1}$

$2 \sum_{k=1}^{p} k \cdot 2^{k-1} = \qquad 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + \cdots + (p-1) \cdot 2^{p-1} + p \cdot 2^p$

$- \sum_{k=1}^{p} k \cdot 2^{k-1} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2^2 + \cdots + 1 \cdot 2^{p-1} - p \cdot 2^p$

よって、$\sum_{k=1}^{p} k \cdot 2^{k-1} = p \cdot 2^p - (2^p - 1) = (p-1) \cdot 2^p + 1$

$(n+1) \sum_{k=1}^{p} (n+1) \cdot 2^{k-2} - (n+1) \sum_{k=1}^{p} k \cdot 2^{k-2} = (n+1)^2 \cdot \frac{2^p - 1}{2} - \frac{n+1}{2}\{(p-1) \cdot 2^p + 1\}$

$= \frac{n+1}{2}\{(n + 1)(2^{p} - 1) - (p - 1) \cdot 2^{p} + 1\}$

$= \frac{n+1}{2}\{(n - p + 2) \cdot 2^{p} - n - 2\}$となるのでこれが答え。

(3)

$S(n, n) - T(s, t, n)$が表すものは、
本来の$a(s, t)$の値がピラミッドに関与する値の総和を表している。
ここで$a(x, y)$が座標$(x + y - 1, y)$に書かれていると仮定する。
すると求める値は、
Zを座標$(s + t - 1, t)$から座標$(n, 1)$までx軸方向もしくはy軸方向に1ずつ動けるとして、
最短距離で移動できる方法の場合の数とした時、
$a(s, t) \cdot Z$となる。

$a(s, t) = (s + 2t - 1) \cdot 2^{s-2}$である。
Zについて考える。
座標$(s + t - 1, t)$から座標$(n, 1)$まで移動する時、x軸方向に$(n - s - t + 1)$回、
y軸方向に$(t - 1)$回移動すればよいので、
その場合の数は
$Z = \frac{(n-s)!}{(t-1)!(n-s-t+1)!}$となるので、
求める答えは、
$\{(s + 2t - 1) \cdot 2^{s-2}\}\frac{(n-s)!}{(t-1)!(n-s-t+1)!}$である。

17

(1)$a_{k+1} \geqq a_{k} \geqq 0$または$a_{k} > a_{k+1} = 0$
(2)$a_{2} = ra_{1}$(rは有理数)
(3)$a_{2} = va_{1}$(vは無理数)
(4)$N = 3903$

(1)
$a_{k+3} = |a_{k+2} - a_{k+1}| = ||a_{k+1} - a_{k}| - a_{k+1}|$
$a_{k+1} \geqq a_{k}$のとき、

$a_{k+3} = |a_k|$なので、$a_{k+1} \geqq a_k \geqq 0$の時に成り立つ。
$a_{k+1} < a_k$のとき、
$a_{k+3} = |a_k - 2a_{k+1}|$
$a_k \geqq 2a_{k+1}$のとき、
$a_{k+3} = a_k - 2a_{k+1}$なので、$a_k = a_{k+3}$が成り立つならば、$a_{k+1} = 0$である。
よって、$a_k > a_{k+1} = 0$のときに成り立つ。
$a_k < 2a_{k+1}$のとき、
$a_{k+3} = 2a_{k+1} - a_k$なので、$a_k = a_{k+3}$が成り立つならば、$a_k = a_{k+1}$であるがこれは不適。
よって、答えは$a_{k+1} \geqq a_k \geqq 0$**または**$a_k > a_{k+1} = 0$

(2)
$a_n = 0$をみたす最小のnをpとする。
任意のnについて、$a_n = s_n a_1 + t_n a_2$と表せる。(s_n, t_nは整数)
$a_1 = 0$または$a_2 = 0$のときは題意は成り立つので、
a_1とa_2がともに0ではない時を考える。
$a_p = 0$より、$s_p a_1 + t_p a_2 = 0$である。

$s_p = t_p = 0$のときを考える。
$|s_{p+2}| = |s_{p+1} - s_p|$
$|t_{p+2}| = |t_{p+1} - t_p|$
が成り立つので、
$s_{p-1} = s_{p-2}, t_{p-1} = t_{p-2}$**が成り立つ。**
よって、$s_{p-3} = t_{p-3} = 0$が成り立つ。
このことから、自然数lを用いて、
$s_{p-3l} = t_{p-3l} = 0$
である。
$s_1 = 1, s_2 = 0, t_1 = 0, t_2 = 1$なので、
$|s_3| = 1, |t_3| = 1$であるが、

これは$s_{p-3l} = t_{p-3l} = 0$であることに矛盾する。
よって、s_pとt_pが同時に0であることはない。

$a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$なので、$s_p \neq 0, t_p \neq 0$である。
よって、$a_2 =- \frac{s_p}{t_p} a_1$である。$(t_p \neq 0)$
$-\frac{s_p}{t_p}$は有理数なので、$a_2 = ra_1$(rは有理数)である。
逆に$a_2 = ra_1$のとき、
$a_1 = x, a_2 = rx$ とする。
$r = \frac{a}{b}$ (a, bは整数かつ$b \neq 0$)とすると、
$a_1 = b \cdot \frac{x}{b}, a_2 = a \cdot \frac{x}{b}$と表せるので、
a_1, a_2が整数のときに題意が成り立てば、$a_2 = ra_1$である。
さらに、a_1, a_2が整数のときは、a_3, a_4は非負整数なので、
a_1, a_2が非負整数のときに題意が成り立てば、$a_2 = ra_1$である。
$a_1 = 0$または$a_2 = 0$のときは示したので、自然数の時を考える。
$\{a_1, a_2, a_3\}\{a_4, a_5, a_6\}... \{a_{3h-2}, a_{3h-1}, a_{3h}\}...$ (hは自然数)
のように数列を1組3個ずつ区切る。
もし、任意の自然数jについて、$a_j = a_{j+3}$が成り立つとき、
$a_{j+1} \geqq a_j \geqq 0$または$a_j > a_{j+1} = 0$が常に成り立つ。
$a_j \neq 0$のとき、$a_{j+1} \geqq a_j > 0$が常に成り立つことになる。
すなわち、$0 < a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq ...$ が成り立つことになるが、
$a_{n+2} = |a_{n+1} - a_n|$なので、
$a_3 < a_1$もしくは$a_3 < a_2$となるので、矛盾する。
このことから、任意の自然数jについて、$a_j = a_{j+3}$が成り立つとき、
あるnについて、$a_n = 0$である。
$n < p$のときでは、$a_j = a_{j+3}$が成り立たない時があり、
そのとき、$a_j > a_{j+1}$である。

その結果、$a_j > a_{j+3}$となる。
$n < p$のときは、$a_j > a_{j+1}$となるようなjは1組ずつ少なくとも1つ存在するので、
i組目と$(i + 1)$組目では、必ず$a_j > a_{j+3}$となるjは存在する。(iは$\frac{p}{3}$以下の自然数)
よって、どれかは減少しているので、最終的に、
$n = p$のときに$a_p = 0$となる。
よって$a_2 = ra_1$(rは有理数)である。

(3)
$a_1 = a_2 = 0$のとき、題意は成り立つ。
a_1, a_2の少なくとも一方が0でないときを考える。
$a_2 = ra_1$(rは有理数)のとき、
$a_p = 0$となるが、$a_{p-1} \neq 0$なので、$a_{p+1} = a_{p+2} \neq 0$となる。そして、$a_{p+3} = 0$となり、以降繰り返す。
よって、題意は成り立たない。
a_1, a_2がともに0でないときを考える。
$a_2 = va_1$(vは無理数)
$a_n = 0$となるようなnは存在しない。
$n \geqq 3$のとき、常に$a_n > 0$である。
$a_{3z}, a_{3z+1}, a_{3z+2}$は単調減少するので、($z$は自然数)
a_nはある値αに収束する。
$\alpha > 0$とし、αよりも小さい正の実数$\Delta s, \Delta t$を考える。
gを自然数とする。$a_g = \alpha + \Delta s, a_{g+1} = \alpha + \Delta t$とする。
すると、$a_{g+2} = |\Delta s - \Delta t|$となる。これはαよりも小さい。
$a_{k+1} > a_k$のとき、$a_k = a_{k+3}$となることから、
$a_{k+1} > a_k$である間、$a_{g+3} a_{g+4}, a_{g+6}, a_{g+7}, a_{g+9}, a_{g+10}$…は単調減少し、$|\Delta s - \Delta t|$に近づく。
これは収束値がαであることに矛盾する。
よって、$\alpha = 0$となる。
よって、$a_2 = va_1$(vは無理数)である。
$a_1 = a_2 = 0$のときも上の式は成り立つから、

$a_2 = va_1$(vは無理数)である。

(4)

$a_1 = log10^{2024}, a_2 = log6$より、$a_3 = log\frac{10^{2024}}{6}, a_4 = log\frac{10^{2024}}{6^2}, a_5 = log6...$となっていき、

$\frac{10^{2024}}{6^{m-1}} > 6$の間はこのような関係は続く。

ここで、$6^m < 10^{2024} < 6^{m+1}$を満たす整数$m$を考える。

$mlog_{10}6 < 2024 < (m + 1)log_{10}6$をみたす。

$log_{10}6 = 0.77815$より、条件を満たすmは2601である。

$a_n = log\ \frac{10^{2024}}{6^{2601}}$となる$n$は3903である。

なお、$n < 3902$のとき、$a_n > 1$である。

$\frac{10^{2024}}{6^{2601}}$の整数部分を考える。

$log_{10}\frac{10^{2024}}{6^{2601}} = 2024 - 2601 \cdot 0.77815 = 0.03185$

ここで、$10^{0.25} = \sqrt{10}^{0.5} < 4^{0.5} = 2$なので、

$10^{0.03185}$の整数部分は1なので、$\frac{10^{2024}}{6^{2601}}$の整数部分は1なので、

$log\ \frac{10^{2024}}{6^{2601}} < 1$となる。

よって、$N = 3903$

18

$m = 4, u = 27$

$f(x)$の極大値は$x = 1$のときで、$x > 3$で単調増加するので、

$f(4) = 2, f(5) = 18$より、$4 < t < 5$である。

また、$h_n(x)$は周期関数であり、周期は$f(x)$で2πである。

$n = 1$のときを考える。

x	t	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$f(x)$	π	↗	$\frac{3}{2}\pi$	↗	2π	↗	$\frac{5}{2}\pi$	↗	3π	$\cdots$
$h_1(x)$	-1	↗	0	↗	1	↘	0	↘	-1	$\cdots$

$h_1(x) = 0$の2024番目に小さい解は$f(x) = \frac{4049}{2}\pi$のときにとる。

$f(20) = 5778, f(21) = 6802$より、$f(20) < \frac{4049}{2}\pi < f(21)$なので、$20 < Z_1 < 21$である。

$n = 2$のときを考える。

$f(x)$	π	↗	$\frac{3}{2}\pi$	↗	2π	↗	$\frac{5}{2}\pi$	↗	3π	$\cdots$
$h_1(x)$	-1	↗	0	↗	1	↘	0	↘	-1	$\cdots$
$i_1(x)$	-18	↗	-2	↗	2	↘	-2	↘	-18	$\cdots$
$h_2(x)$	$cos18$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$cos2$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$cos18$	$\cdots$

$-\frac{13}{2}\pi <- 18 <- \frac{11}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi < 2 < \frac{3}{2}\pi$**なので、**

1周期に解は14個ある。

よって2024番目に小さい解は145周期目にある。

よって、$289\pi \leqq f(x) < 291\pi$**である。**

$f(11) = 702, f(12) = 970$より、$f(11) < 289\pi, 291\pi < f(12)$なので、

$11 < Z_2 < 12$である。

$\pi \leqq f(x) < 3\pi$のとき、

$x = 2\pi$で対称であるので、

$\pi \leqq x \leqq 2\pi$の区間を2倍したのが1周期となるので、

今後は、区間 $\pi \leqq x \leqq 2\pi$で考える。

$n = 3$のときを考える。

$f(x)$	π	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
$i_1(x)$	-18	…	$-\frac{11}{2}\pi$	…	-5π	…	$-\frac{9}{2}\pi$	…	-4π	…	$-\frac{7}{2}\pi$	…	-3π	…
$h_2(x)$	$cos18$	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗
$i_2(x)$	$f(cos18)$	↘	-2	↘	-18	↗	-2	↗	2	↘	-2	↘	-18	↗

…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	2π
$-\frac{5}{2}\pi$	…	-2π	…	$-\frac{3}{2}\pi$	…	$-\pi$	…	$-\frac{\pi}{2}$	…	0	…	$\frac{\pi}{2}$	…	2
0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0	↘	$cos2$
-2	↗	2	↘	-2	↘	-18	↗	-2	↗	2	↘	-2	↘	$f(cos2)$

$\frac{11}{2}\pi < 18 < \frac{13}{2}\pi$なので、

$0 < cos18 < 1$より、$-2 < i_1(18) < 2$であるので、

区間 $-2 < i_2(x) < f(cos18)$において、$h_3(x) = 0$の解は、

0~2個存在する。

区間 $-18 < i_2(x) <-2$において、$h_3(x) = 0$の解は、

5個存在する。

区間 $-2 < i_2(x) < 2$において、$h_3(x) = 0$の解は、

2個存在する。

$-18 < f(cos2) <-2$なので、

区間 $f(cos2) < i_2(x) <-2$において、$h_3(x) = 0$の解は、

0~5個存在する。

よって、半周期に解は42個以上49個以下存在するので、

1周期84個以上98個以下存在するので、

2024番目に小さい解は20~25周期目に存在するので、

$39\pi \leqq f(x) < 51\pi$である。

$f(7) = 110, f(8) = 198$より、$f(7) < 39\pi, 51\pi < f(8)$

$7 < Z_3 < 8$である。

$n≧4$のときを考える。
区間 $-2≦i_n(x)≦2$のときの、$i_{n+1}(x)$の増減表を書くと、

$i_n(x)$	-2	$\cdots$	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	2
$h_{n+1}(x)$	$cos2$	↗	0	↗	1	↘	0	↘	$cos2$
$i_{n+1}(x)$	$f(cos2)$	↗	-2	↗	2	↘	-2	↘	$f(cos2)$

区間 $-18≦i_n(x)≦-2$のときの、$i_{n+1}(x)$の増減表を書くと、

$i_n(x)$	-18	$\cdots$	$-\frac{11}{2}\pi$	$\cdots$	-5π	$\cdots$	$-\frac{9}{2}\pi$	$\cdots$	-4π	$\cdots$
$h_{n+1}(x)$	$cos18$	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘
$i_{n+1}(x)$	$f(cos18)$	↘	-2	↘	-18	↗	-2	↗	2	↘

$-\frac{7}{2}\pi$	$\cdots$	-3π	$\cdots$	$-\frac{5}{2}\pi$	$\cdots$	-2π	$\cdots$	$-\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	$-\pi$	$\cdots$	-2
0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	$cos2$
-2	↘	-18	↗	-2	↗	2	↘	-2	↘	-18	↗	$f(cos2)$

区間 $f(cos2)≦i_n(x)≦-2$については、区間 $-18≦i_n(x)≦-2$の間に$f(cos2)$がある
増減表になる。

区間 $-18≦i_n(x)≦f(cos2)$についても同様に、区間 $-18≦i_n(x)≦-2$の間に$f(cos2)$がある
増減表になる。

$-2≦i_n(x)≦2$となる区間の数をD_n、

$-18 \leqq i_n(x) \leqq -2$となる区間の数を$E_n$、
$f(cos2) \leqq i_n(x) \leqq -2$となる区間の数を$F_n$、
$-18 \leqq i_n(x) \leqq f(cos2)$となる区間の数を$G_n$とすると、

D_n, E_n, F_n, G_nの関係は次のようになる。
$D_2 = 6, E_2 = 6, F_2 = 1, G_2 = 0$
$2D_n + 4E_n \leqq D_{n+1} \leqq 2D_n + 4E_n + 4F_n + 4G_n$
$5E_n \leqq E_{n+1} \leqq 5E_n + 5F_n + 5G_n$
$2D_n \leqq F_{n+1} \leqq 2D_n + F_n + G_n$
$E_n \leqq G_{n+1} \leqq E_n + F_n + G_n$
これより、$36 \leqq D_3 \leqq 40, 30 \leqq E_3 \leqq 35, 12 \leqq F_3 \leqq 13, 6 \leqq G_3 \leqq 7$である。

ここで、
区間 $-2 < i_2(x) < f(cos18)$のときの、$i_{n+1}(x)$の増減表を書く。
$\frac{\pi}{2} < f(cos18) < 2$と仮定すると、

$i_n(x)$	-2	$\cdots$	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$f(cos18)$
$h_{n+1}(x)$	$cos2$	↗	0	↗	1	↘	0	↘	$h_1(18)$
$i_{n+1}(x)$	$f(cos2)$	↗	-2	↗	2	↘	-2	↘	$i_1(18)$

このことから、
$h_{n+1}(x) = 0$の解の個数は最大で2個で、最小で0個、
$h_{n+2}(x) = 0$の解の個数は最大で14個で、最小で0個である。
またその区間の数をH_nとすると、$H_2 = 1$であり、
$E_2 \leqq H_3 \leqq E_2 + G_2$より、$H_3 = 6$である。

区間 $-2 \leqq i_n(x) \leqq 2$においての$h_{n+1}(x) = 0$の解の個数は2個、
区間 $-18 \leqq i_n(x) \leqq -2$においての$h_{n+1}(x) = 0$の解の個数は5個、
区間 $f(cos2) \leqq i_n(x) \leqq -2$においての$h_{n+1}(x) = 0$の解の個数は0~5個、
区間 $-18 \leqq i_n(x) \leqq f(cos2)$においての$h_{n+1}(x) = 0$の解の個数は0~5個。
よって、半周期に存在する$h_4(x) = 0$の解の個数を数える。
その数は最低で、
$36 \cdot 2 + 30 \cdot 5 = 222$個
最大で、
$40 \cdot 2 + 35 \cdot 5 + 13 \cdot 5 + 7 \cdot 5 + 14 = 369$個
存在する。
よって、半周期に222個以上369個以下存在する。
なので2024番目に小さい解は6~10半周期目に存在するので、
$6\pi \leqq f(x) < 11\pi$である。
$f(5) = 18, f(6) = 52$より、$f(5) < 6\pi, 11\pi < f(6)$なので、
$5 < Z_4 < 6$である。

$n \geqq 5$のとき、
$D_{n-1} > D_{n-2} > \ldots > D_4 \geqq 2D_3 + 4E_3 = 72 + 120 = 192$
$E_{n-1} > E_{n-2} > \ldots > E_4 \geqq 5E_3 = 30 \cdot 5 = 150$
であるので、
$D_{n-1} \geqq 192, E_{n-1} \geqq 150$である。
半周期に存在する$h_n(x) = 0$の解の個数は少なくとも、
$192 \cdot 2 + 150 \cdot 5 = 1134$個である。
よって1周期には2268個存在するため、
2024番目に小さい解は1周期目に存在する。
よって、$\pi \leqq f(x) < 3\pi$である。
$f(4) = 2, f(5) = 18$より、$f(4) < \pi, 3\pi < f(5)$より、
$4 < Z_n < 5$である。

$\sum_{j=1}^{\infty}([Z_j - m])$**について、**

$m \geqq 5$ならば$n \geqq 5$のとき、

$[Z_n - m] \leqq -1$となるので$-\infty$に発散する。

$m \leqq 3$ならば$n \geqq 5$のとき、

$[Z_n - m] \geqq 1$となるので∞に発散する。

よって、$m = 4$である。

またそのとき、$n \geqq 5$のとき、$[Z_n - m] = 0$となる。

$n = 1$のとき、$[Z_n - m] = 16$

$n = 2$のとき、$[Z_n - m] = 7$

$n = 3$のとき、$[Z_n - m] = 3$

$n = 4$のとき、$[Z_n - m] = 1$

よって、$\sum_{j=1}^{\infty}([Z_j - m]) = 27$である。

よって、$m = 4, u = 27$